EPITA IPSA ESME

CONCOURS

CPGE

EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 9 avril 2022

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

MP / PC / PSI

Durée : 3 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2022

Épreuve de Mathématiques MP - PC - PSI

Dans la partie I de ce problème, on étudie des intégrales dépendant d'un paramètre. Dans les parties II et III, on exploite le calcul intégral afin d'obtenir des relations entre différentes sommes de séries. Dans la partie IV, on applique les résultats ainsi obtenus à l'étude aux bornes d'une série entière. Les parties sont assez largement indépendantes à condition d'admettre certains résultats établis.

■ PARTIE I : INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

On désigne par a un réel strictement positif et on se propose d'étudier pour tout réel x les intégrales :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\, e^{i\pi x t}\, \mathrm{d}t \qquad ; \qquad K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} \cos(\pi x t)\, \mathrm{d}t.$$

1°) *Calcul de l'intégrale $J(0)$*

On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\sqrt{\pi}$.

Pour tout réel strictement positif a, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $J(0)$.

2°) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée*

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J(x)$ pour tout réel x.

b) Etablir que la fonction J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner une expression intégrale de $J'(x)$.

c) Etablir que la fonction J est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\pi x}{2a}\, y = 0$.

d) En déduire la valeur de $J(x)$ pour tout réel x, puis montrer la convergence de $K(x)$ et l'égalité :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

■ PARTIE II : ÉTUDE DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

On désigne par g une application de classe C^2 définie de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{C}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(g) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(x) \cos(2\pi n x)\, \mathrm{d}x.$$

3°) *Etude d'une fonction auxiliaire*

Pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \backslash \{0\}$, on pose : $h(x) = \frac{g(x) - g(0)}{\sin(\pi x)}$.

a) Déterminer la limite L de $h(x)$ lorsque x tend vers 0.

On supposera désormais h prolongée par continuité sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ en posant : $h(0) = L$.

b) Exprimer $h'(x)$ pour x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \backslash \{0\}$ et préciser sa limite L' lorsque x tend vers 0.

c) En déduire que h est de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et préciser $h'(0)$.

4°) *Calcul d'une somme trigonométrique*

a) Vérifier par récurrence sur l'entier $p \geq 1$ qu'on a pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2\pi n x) = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Cette égalité se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

b) En déduire la relation suivante pour tout entier naturel p : $\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,\mathrm{d}x = 1.$

5°) *Convergence et somme de la série* $\sum a_n(g)$

a) Etablir la relation suivante pour tout entier $p \geq 1$:

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) = g(0) + \int_{-1/2}^{+1/2} (g(x) - g(0))\,\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

b) En exploitant les résultats de la question 3 et une intégration par parties, en déduire que :

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) = g(0).$$

■ PARTIE III : FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Dans toute cette partie, on désigne par a un réel strictement positif et on pose pour tout réel x :

$$f_a(x) = e^{-\pi a x^2} \qquad \text{et} \qquad g_a(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k) + f_a(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$$

où $g_a(x)$ est défini sous réserve de convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$.

Et dans ce cas, on conviendra de noter plus simplement : $g_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+k)$.

6°) *Propriétés de la fonction* g_a

a) Etablir la convergence des séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction g_a est 1-périodique.

c) Justifier la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2}\, e^{2ka\pi A}$ pour tout réel strictement positif A.

En déduire la convergence normale sur $[-A, A]$ des séries $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$, puis la continuité de la fonction g_a sur $\mathbb{R}$.

d) Etablir que la fonction g_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On établit de même, et on l'admettra, que la fonction g_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

7°) *La formule sommatoire de Poisson et application*

a) Justifier l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f_a(x+k)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

b) En effectuant le changement de variables $t = x + k$, en déduire l'égalité suivante :

$$a_n(g_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

A l'aide des résultats de la partie I, en déduire la valeur (sans signe intégral) de $a_n(g_a)$.

c) Déduire alors des résultats de la partie II que :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

d) En vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ que : $e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \leq e^{-\frac{\pi n}{a}}$, en déduire qu'on a lorsque a tend vers 0 :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + o(1).$$

■ PARTIE IV : APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

8°) On considère la série entière de la variable réelle x définie par :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} = \frac{1}{2} + x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots .$$

a) Quel est le rayon de convergence de cette série entière? Sur quel intervalle réel est-elle définie?

b) En posant $t = 1 - x$ avec $x \in]\,0,\, 1[$, démontrer que : $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \right) = 0$.

A l'aide des résultats de la partie III, établir qu'on a alors quand x tend vers 1 :

$$S(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} + o(1).$$

c) En déduire un réel C tel qu'on a quand x tend vers 1 : $S(x^4) = \frac{C}{\sqrt{1-x}} + o(1)$.

d) Exprimer, pour $|x| < 1$, la somme $S(x) + S(-x)$ en fonction de $S(x^4)$.

En déduire enfin que :

$$\lim_{x \to -1} S(x) = 0.$$